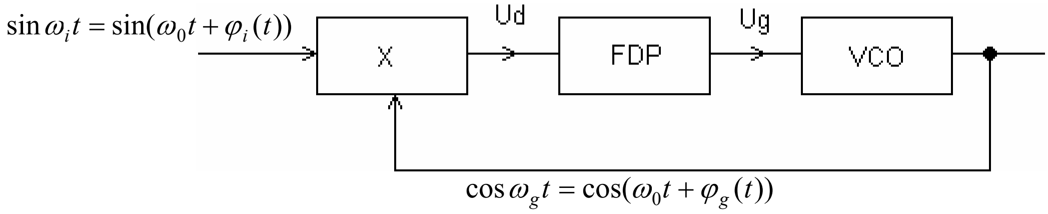
Równanie dynamiki pętli fazowej



Możemy zapisać, że

$$\varphi_g(t) = \int_0^t (\omega_g - \omega_0)d\tau \ \text{ lub } \ \frac{d\varphi_g}{dt} = \omega_g - \omega_0$$

Na wyjściu detektora fazy uzyskujemy napięcie $U_d = K_d\sin(\varphi_g - \varphi_i)$. Na wyjściu tym pojawia się jeszcze składowa w.cz. $(2\omega_0+\varphi_i+\varphi_g)$, która jednak jest eliminowana w filtrze dolnoprzepustowym FDP. Napięcie na jego wyjściu filtru dane jest wzorem:

$$U_g(t) = \int_0^t U_d(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = h(t) * U_d(t)\,,$$

gdzie * oznacza splot funkcji, $h(\tau)$ jest odpowiedzią impulsową filtru. Częstotliwość drgań generatora VCO wynosi

$$\omega_g = \omega_0 + K_g U_g\,,$$

gdzie ω_0.jest pulsacją spoczynkową (wytwarzaną przy braku napięcia na wejściu) a K_g współczynnikiem przestrajania generatora VCO. Możemy zapisać

$$K_g \cdot U_g = \omega_g - \omega_0 = \frac{d\varphi_g}{dt}\,,$$

oraz

$$\frac{d\varphi_g}{dt} = K_g \cdot h(t) * U_d(t) = K_g K_d \cdot h(t) * \sin(\varphi_i(t) - \varphi_g(t))\,.$$

Równanie powyższe można zlinearyzować w pobliżu $\varphi \equiv \varphi_g - \varphi_i = 0$. Linearyzacja taka jest poprawna jedynie dla niewielkich wartości x. W zakresie liniowym mamy $\sin(\varphi) = \varphi$ i wtedy

$$\frac{d\varphi_g}{dt} = Kh(t) * (\varphi_i(t) - \varphi_g(t))$$

gdzie oznaczono $K = K_d K_g$ Po przekształceniu Laplacea:

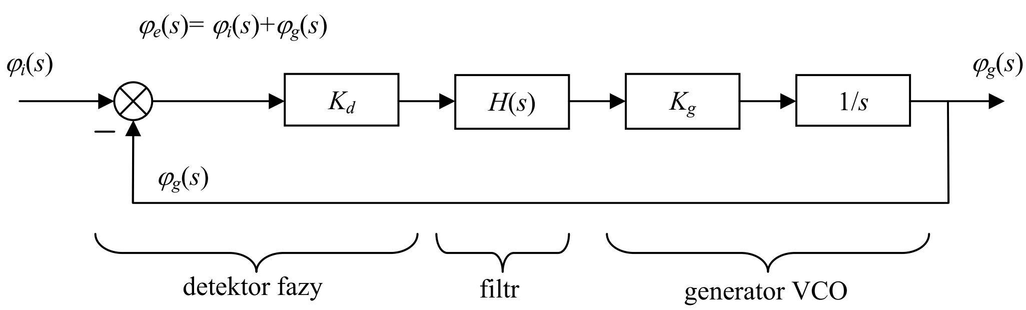
$$s\varphi_g(s) = KH(s)(\varphi_i(s) - \varphi_g(s))$$

$$\varphi_g(s) = \frac{KH(s)}{s + KH(s)} = T(s)\varphi_i(s)$$

gdzie

$$T(s) = \frac{T_0(s)}{1 + T_0(s)}, \quad T_0(s) = \frac{KH(s)}{s}$$

co przypomina wzór na wzmocnienie w układzie z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego. $T_0(s) = KH(s)/s$ jest transmitancją pętli otwartej a $T(s)$ transmitancją pętli zamkniętej (transmitancja czwórnika s.z. $\beta = 1$). Pętlę PLL można więc przedstawić na następującym schemacie blokowym:



Zauważmy, że $T(s)$ określa również transmitancję dla zmian częstotliwości $\Delta\omega_g = \omega_g - \omega_0$, $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_0$. Ponieważ pulsacja jest pochodną fazy, mnożąc obie strony równania przez s otrzymujemy

$$\Delta\omega_g(s) = s\varphi_g(s) = sT(s)\varphi_i(s) = T(s)\Delta\omega_i(s)\,.$$